

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ**

по дисциплине
ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

Направление подготовки: 08.03.01 «Строительство»

Профиль подготовки:

«Промышленное и гражданское строительство»

Степень выпускника: бакалавр

Форма обучения: интернет - институт

Тула 2017 г.

1. Введение

Настоящие методические указания предназначены для оказания помощи студенту в его работе по изучению динамики и устойчивости сооружений.

С этой целью студенту предлагаются тематические методические указания, которые будут направлять его деятельность по приобретению знаний, умений и навыков в решении типовых задач по изучаемой дисциплине.

Для этого каждому студенту на протяжении всего учебного периода выдаются строго индивидуальные задания.

2. Тематические методические указания

Занятие №1 Оценка значения критической нагрузки при узловом нагружении методом эквивалентного стержня.

Требуется приобрести умения проводить оценку диапазона значений критической нагрузки для простейших расчетных схем на основе геометрического смысла коэффициента свободной длины в формуле критической нагрузки по Эйлеру

$$P_{кр}^{Эйлера} = \left(\frac{\pi}{\mu L} \right)^2 EJ.$$

Для этого нужно установить связь значения этого коэффициента с формой кривой при потере устойчивости. Стандартные формы этой кривой для различных случаев закрепления приведены на рис.1.

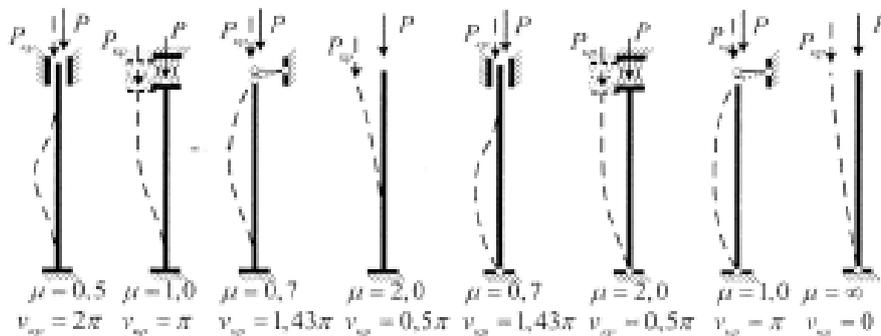


Рис.1 Критическая сила Эйлера в однопролетных стержнях

Идея оценки критической силы при узловой нагрузке заключается в том, что упруго опертое сечение сжатого участка представляется двумя крайними случаями:

1) упруго сопротивление в крайнем сечении отсутствует (изгибная жесткость сопряженного участка равно нулю);

2) упруго сопротивление в крайнем сечении крайне велико (жесткое опирание). Диапазон между соответствующими двумя значениями и дает первое приближение оценки.

На втором этапе, исходя из того, что любое значение реальной жесткости опоры значительно больше нулевого, оценка уточняется путем приближения к значению с абсолютно жесткой опорой.

Отметим, что большую роль в выполнении алгоритма оценки играет умение правильно сопоставить каждому крайнему случаю один из вариантов опирания (и значения критической силы) рис. 1.

Детальный пример рассуждений по построению оценки приведен в [1] (глава 10, п.10.2 Приложение 1).

Занятие № 2 Анализ случаев закрепления участков, сжатых узловыми силами. Построение интервала, содержащего параметр критического значения нагрузки для каждого сжатого участка.

Требуется научиться использовать относительное значение параметра нагрузки, используя данные таблиц метода перемещений для сжато-изогнутых стержней, где этот параметр определяется выражением

$$v_k = l_k \sqrt{\frac{P_k}{E_k J_k}},$$

где k - номер сжатого участка длиной l_k , нагруженного силой сжатия P_k и имеющего параметры изгибной жесткости ($E_k J_k$).

Между параметром нагрузки v_k и коэффициентом свободной длины существует соотношение $\mu_k = \pi / v_k$.

Таким образом, значения коэффициента свободной длины на рис. 1 могут быть использованы проведения оценки критической силы в значениях коэффициента свободной длины.

При этом сам подход остается неизменным: анализируются два предельных случая закрепления каждого сжатого участка с использованием значений коэффициента свободной длины, приведенных на рис. 1.

Оценка значения критического параметра для расчетной схемы в целом требует умения определять участок, который в ЗРС теряет устойчивость при минимальном значении параметра внешней нагрузки.

При наличии нескольких сжатых участков на каждом из них можно произвести оценку интервала значений критического параметра методом эквивалентного стержня.

В соответствии с определением критической нагрузки как минимальной из всех нагрузок, способных поддерживать два смежных состояния равновесия, а также с учетом формулы (2), можно утверждать, что расчетная схема теряет устойчивость, как только потеряет устойчивость один из сжатых участков.

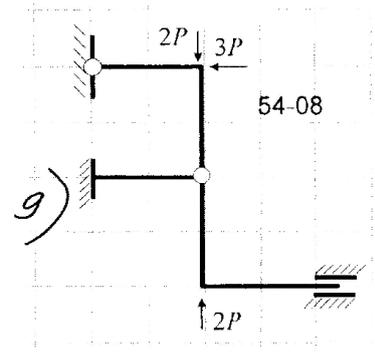
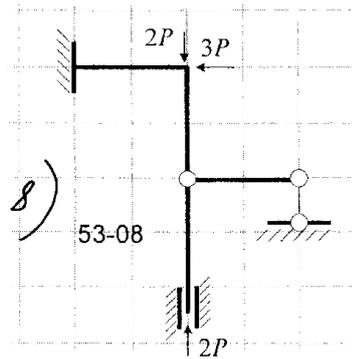
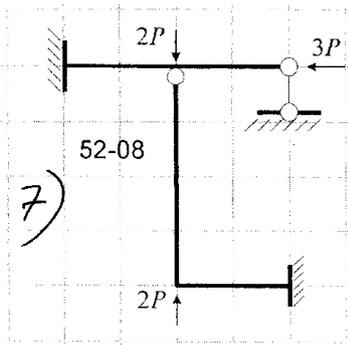
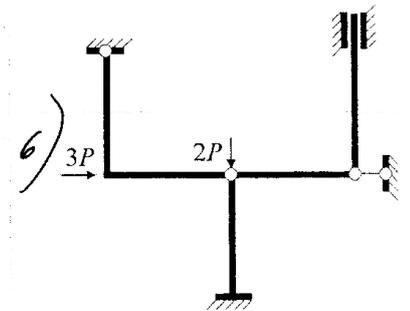
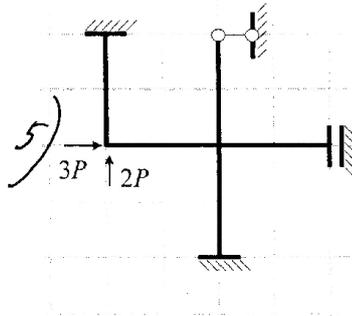
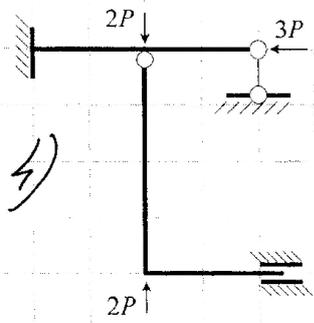
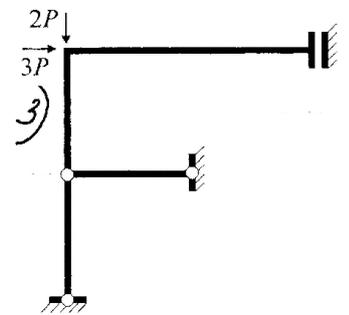
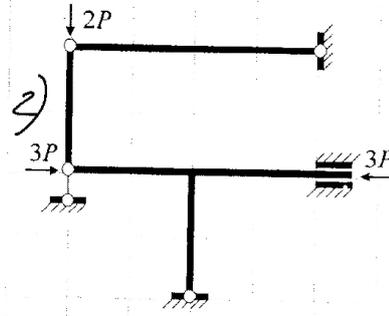
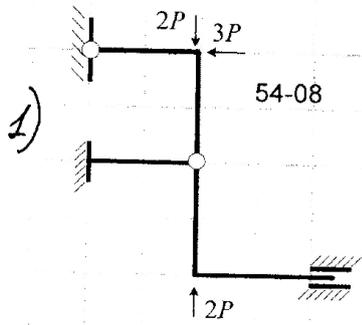
Следовательно, нужно ответить на вопрос, какой из участков это сделает первым - при минимальном значении параметра критической нагрузки, выраженном в общем масштабе измерения. В то время как другие сжатые участки просто изогнуться, выполняя закон совместности перемещений.

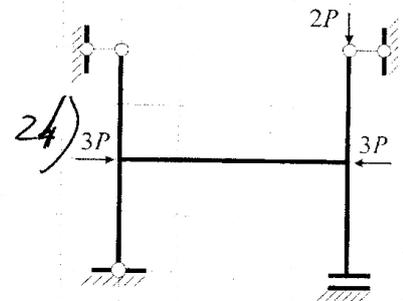
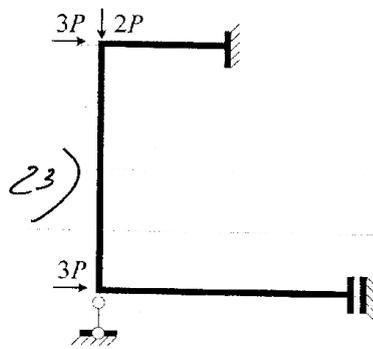
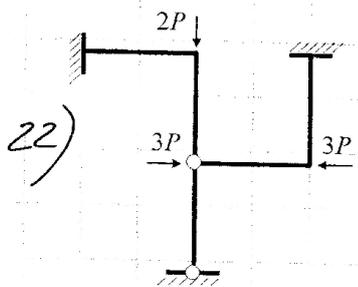
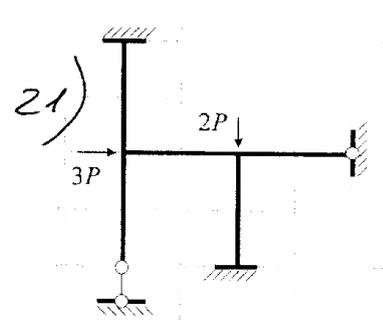
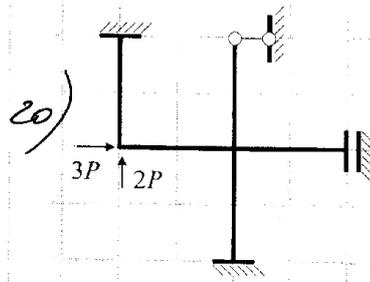
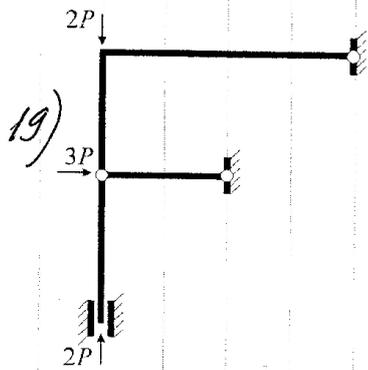
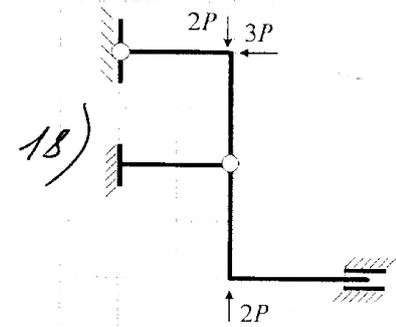
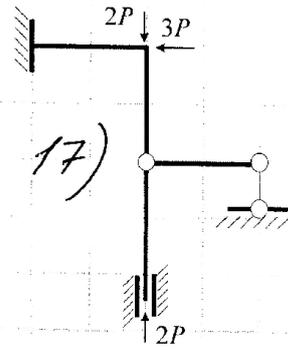
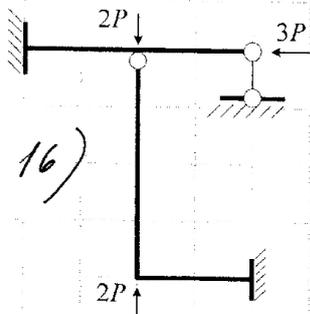
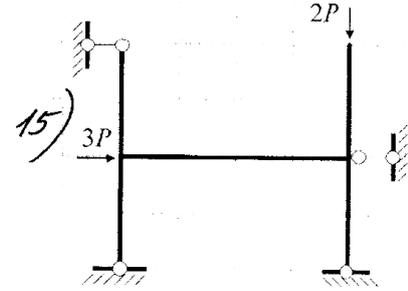
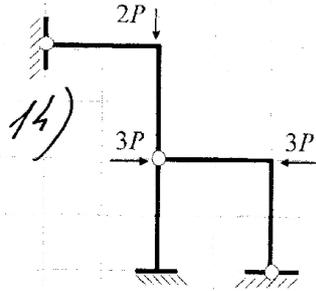
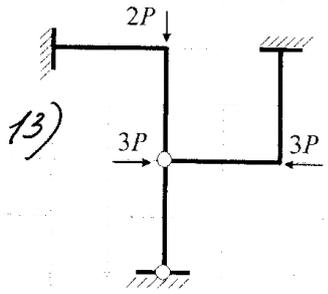
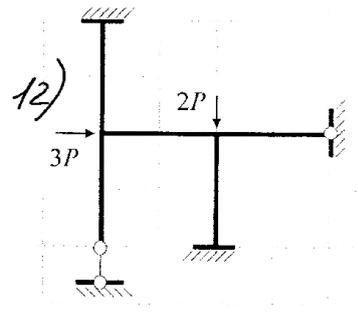
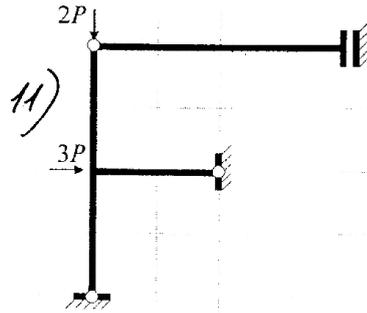
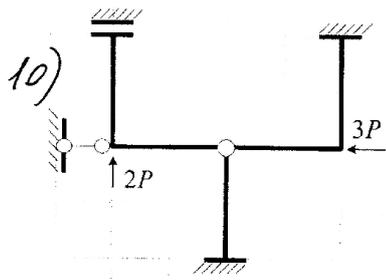
Сравнивая оценки параметра нагрузки для каждого участка это можно сделать однозначно только для простейших комбинаций сжатых участков в составе рамных систем при узловой нагрузке сосредоточенными силами.

Детальный пример применения описанного подхода приведен в [1]

(глава 10, п.10.2 Приложение 1).

3. Расчетные схемы для выполнения практических работ (для 1-ого и 2-ого занятий)





Глава 10
УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

10.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСЧЕТА

Потеря устойчивости деформированного состояния равновесия строительной конструкции проявляется в *неоднозначности* формы их равновесия под действием нагрузки, которая получила *незначительное* (сколь угодно малое) приращение величины. Ниже будут исследоваться формы равновесия, сопровождающиеся появлением малых (в сравнении с линейными размерами) поперечных перемещений оси конструктивного стержневого элемента вследствие изменения величины продольной силы при сохранении ее направления («мертвая» нагрузка). Такой класс задач получил название *продольного изгиба*.

Задачей расчета в этом случае является определение значения продольной нагрузки, при котором появляются поперечные перемещения *минимальной* величины. Соответствующая нагрузка получила название *критической*. Важным является также решение вопроса о том, какой именно стержневой элемент потерял устойчивость. Поскольку такой конструктивный элемент является «слабым местом» конструкции в целом.

На рис. 10.1 приведена расчетная схема рамы (ЗРС), которая нагружена *узловой* нагрузкой в виде сосредоточенных сил.

Для этой расчетной схемы требуется определить значение критической нагрузки $P_{кр}$ и *построить форму потери устойчивости* (форму смежного состояния равновесия, возникающую при потере устойчивости за счет поперечных перемещений).

Решение задачи рекомендуется проводить в три этапа: 1) оценить значение критической нагрузки способом эквивалентного стержня; 2) получить приближенное решение задачи методом перемещений для

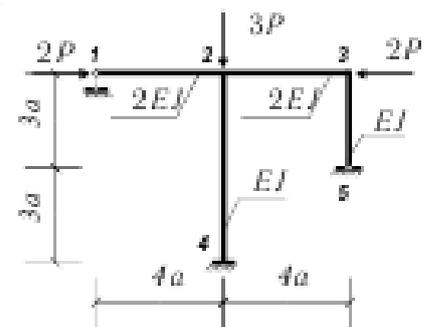


Рис. 10.1

сжато-изогнутых стержней; 3) уточнить решение на ЭВМ с использованием программы реализации метода перемещений.

10. 2. ОЦЕНКА ЗНАЧЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ СПОСОБОМ ЭКВИВАЛЕНТНОГО СТЕРЖНЯ

Идея способа основана на применении обобщенной формулы Эйлера, генерирующей значения критической силы для однопролетных стержней, которые опираются на систему абсолютно жестких опорных стержней, образующих стандартные способы опирания. Формула имеет следующее выражение:

$$P_{кр}^{Э.о.} = \left(\frac{\pi}{\mu l} \right)^2 EJ = \left(\frac{\left(\frac{\pi}{\mu} \right)}{l} \right)^2 EJ = \left(\frac{v_{кр}}{l} \right)^2 EJ \Rightarrow v_{кр} = \frac{\pi}{\mu} = l \sqrt{\frac{P_{кр}}{EJ}},$$

где μ – коэффициент свободной длины стержня в смежном состоянии равновесия. Этот коэффициент показывает, какую часть начальной длины стержня занимает так называемая «полуволна потери устойчивости» оси стержня, которая характеризуется тем, что в ее концевых точках изгибающий момент равен нулю, а в средней точке поперечное перемещение достигает максимума. Формула охватывает все возможные случаи закрепления концов стержня с помощью недеформируемых опорных стержней (рис. 10.2).

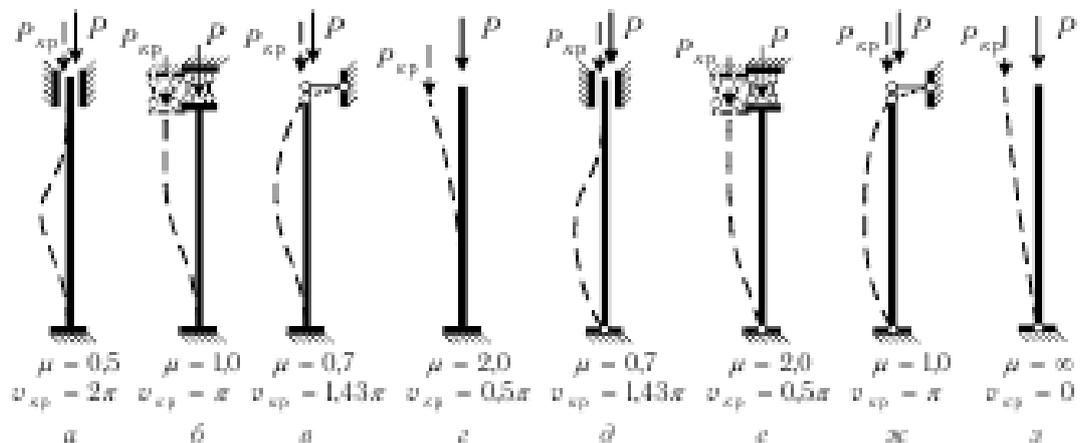


Рис. 10.2

Большая часть стержневых элементов конструкции опирается своими концами на соседние элементы, которые обладают ограниченной

жесткостью, и создают, таким образом, условия *упругого* опирания для включенного между ними элемента. Варьируя значением жесткости опорных элементов между нулем и бесконечностью, всегда можно указать два из перечисленных на рис. 10.2 предельных случаев, между которыми располагается исследуемый упруго опертый стержень. Отсюда и вытекает возможность *оценки* – определения интервала значений, содержащего искомую силу.

10.2.1. ОЦЕНКА КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ НА УЧАСТКЕ 1-2

Поскольку в точке 1 опирание участка стандартное, а в точке 2 – упругое, постольку рассмотрим именно варианты стандартного опирания точки 2 (рис. 10.3). Пренебрегая растяжимостью оси стержня при наличии изгиба можно убедиться в том, что на поперечное перемещение в смежном состоянии влияет значение поворота сечения в точке 2. А это означает, что предельными случаями будут вариант шарнирной заделки (рис. 10.3, а) и вариант жесткой заделки (рис. 10.3, б).

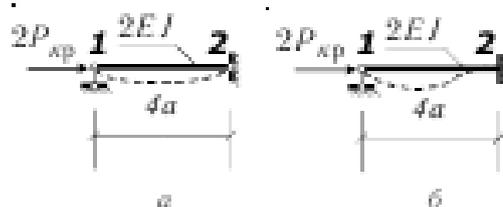


Рис. 10.3

Воспользуемся обобщенной формулой Эйлера для определения значений критической силы P этих вариантов опирания:

$$P_{1-2,кр}^{(a)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{1-2}^{(рис.2,а)} \cdot l_{1-2}} \right)^2 E_{1-2} J_{1-2} = \left(\frac{\pi}{1,0 \cdot 4a} \right)^2 \cdot 2EI = 1,234 \frac{EI}{a^2} = 2P_{кр};$$

$$P_{1-2,кр}^{(б)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{1-2}^{(рис.2,б)} \cdot l_{1-2}} \right)^2 E_{1-2} J_{1-2} = \left(\frac{\pi}{0,7 \cdot 4a} \right)^2 \cdot 2EI = 2,518 \frac{EI}{a^2} = 2P_{кр};$$

$$1,234 \frac{EI}{a^2} < 2P_{кр} < 2,518 \frac{EI}{a^2} \Rightarrow 0,617 \frac{EI}{a^2} < P_{кр} < 1,26 \frac{EI}{a^2}. \quad (10.1)$$

Итак, получена *первая* оценка значения критической нагрузки. Поскольку участок 2-3, хотя и имеет характеристики, те же, что и участок 1-2, но опирается в системе несколько иначе, приходится и для него проводить соответствующую оценку критической нагрузки.

10.2.2. ОЦЕНКА КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ НА УЧАСТКЕ 2-3

Варианты опирания участка 2-3 в точке 2 точно такие же, что и для участка 1-2, поскольку точка 2 – общая, и оси участков лежат на одной прямой.

В точке 3 (жесткий узел) проходят те же рассуждения, что и в точке 2: степень упругости опирания определяется только углом поворота сечения в точке 3.

В результате мы имеем четыре варианта опирания участка 2-3 изображенные на рис. 4. По данным этого рисунка, с чисто формаль-

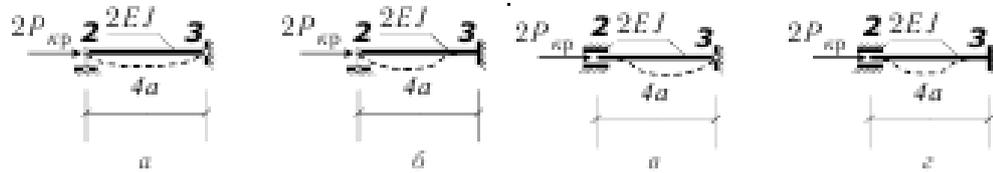


Рис. 10.4

ной точки зрения, мы получаем три граничных значения для критической силы (варианты рис. 10.4, б и рис. 10.4, в являются идентичными):

$$P_{2-3,кр}^{(a)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{2-3}^{(рис.10.2, в)} \cdot l_{2-3}} \right)^2 E_{2-3} J_{2-3} = \left(\frac{\pi}{1,0 \cdot 4a} \right)^2 \cdot 2EJ = 1,234 \frac{EJ}{a^2} = 2P_{кр};$$

$$P_{2-3,кр}^{(б,в)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{2-3}^{(рис.10.2, а)} \cdot l_{2-3}} \right)^2 E_{2-3} J_{2-3} = \left(\frac{\pi}{0,7 \cdot 4a} \right)^2 \cdot 2EJ = 2,518 \frac{EJ}{a^2} = 2P_{кр};$$

$$P_{2-3,кр}^{(г)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{2-3}^{(рис.10.2, а)} \cdot l_{2-3}} \right)^2 E_{2-3} J_{2-3} = \left(\frac{\pi}{0,5 \cdot 4a} \right)^2 \cdot 2EJ = 4,935 \frac{EJ}{a^2} = 2P_{кр}.$$

Но, поскольку мы ищем минимальное значение нагрузки, постольку интервал оценки смещается в область меньших значений.

$$1,234 \frac{EJ}{a^2} < 2P_{кр} < 2,518 \frac{EJ}{a^2} \Rightarrow 0,617 \frac{EJ}{a^2} < P_{кр} < 1,26 \frac{EJ}{a^2}. \quad (10.2)$$

Следует, однако, отметить, что любое значение изгибной жесткости, соответствующее реальной конструкции, далеко не нулевое. Поэтому приходится учитывать, что оценка будет смещена в сторону большего граничного значения, т.е. ближе к $1,26EJ/a^2$. И поскольку на этом участке два упругих закрепления, то критическая нагрузка на первом участке, где упруго оперт только один узел, будет меньше. Хотя интервал оценки критической нагрузки для участков является общим.

10.2.3. ОЦЕНКА КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ НА УЧАСТКЕ 2-4

Хотя точка 2 участка 2-4 и является общей для участков 1-2, 2-3 и 2-4 варианты ее закрепления в составе участка 2-4 отличаются от вари-

антов для точки 2, рассмотренных ранее. Дело в том, что на возникновение поперечных перемещений оси этого участка влияет не только угол поворота сечения 2, но и возможность его поперечного перемещения. Такое перемещение может возникать в силу отсутствия на оси 1-2-3 опорного горизонтального стержня. Так что ограничение на значение этого перемещения связано только с величиной изгибной жесткости стойки 3-5.

В силу указанных обстоятельств, возможны четыре варианта опирания точки 2 (ось участка, как и ранее, при изгибе считается нерастяжимой), изображенные на рис. 10.5.

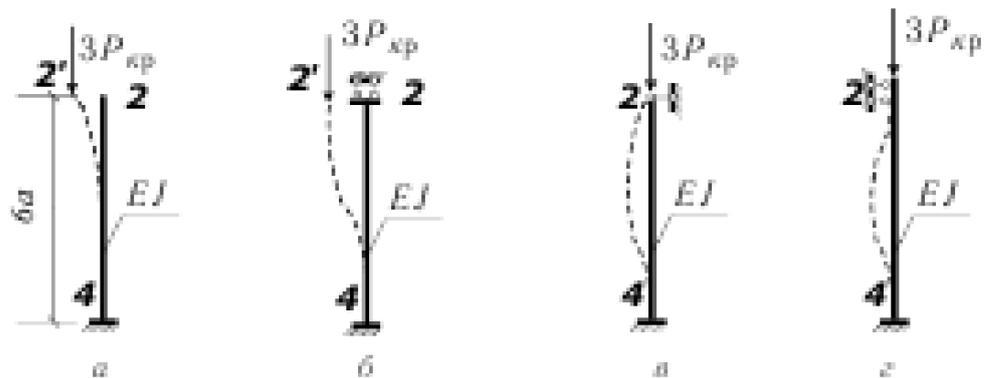


Рис. 10.5

Рис. 10.5, *а* – свободный конец, что соответствует нулевой изгибной жесткости участков 1-2, 2-3 и 3-5 (возможны поворот и горизонтальное перемещение сечения в точке 2).

Рис. 10.5, *б* – ползун (скользящая заделка), что соответствует абсолютно жесткому ригелю и стойке 3-5 нулевой изгибной жесткости (возможно только горизонтальное перемещение сечения 2).

Рис. 10.5, *в* – шарнирная заделка, что соответствует нулевой изгибной жесткости участков ригеля и абсолютно жесткой стойке 3-5 (возможен только поворот сечения 2).

Рис. 10.5, *г* – жесткая заделка, что соответствует абсолютно жесткому ригелю и стойке 3-5 (сечение в точке 2 перемещаться не может).

Что касается точки 4, то в ней мы имеем стандартное опирание в виде жесткой заделки.

Таким образом, предстоит провести анализ интервала, содержащего значение критической нагрузки, по указанным выше вариантам опирания. Предварительно заметим, что, как следует из сравнения значений параметра критической нагрузки $\nu_{кр}$ на рис. 10.2, *а* и рис. 10.2, *б*, рис. 10.2, *в* и рис. 10.2, *г*, рис. 10.2, *д* и рис. 10.2, *е*, а также рис. 10.2, *ж* и рис. 10.2, *з*, наличие поперечного перемещения в опорном сечении *уменьшает* значение критической нагрузки. Это видно по значениям $\nu_{кр}$.

Вычислим критические нагрузки для каждого варианта:

$$P_{2-4,cr}^{(a)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{2-4}^{(расч. 10.2, a)} \cdot l_{2-4}} \right)^2 E_{2-4} J_{2-4} = \left(\frac{\pi}{2,0 \cdot 6a} \right)^2 \cdot EJ = 0,06854 \frac{EJ}{a^2} = 3P_{cr};$$

$$P_{2-4,cr}^{(б)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{2-4}^{(расч. 10.2, б)} \cdot l_{2-4}} \right)^2 E_{2-4} J_{2-4} = \left(\frac{\pi}{1,0 \cdot 6a} \right)^2 \cdot EJ = 0,2741 \frac{EJ}{a^2} = 3P_{cr};$$

$$P_{2-4,cr}^{(в)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{2-4}^{(расч. 10.2, в)} \cdot l_{2-4}} \right)^2 E_{2-4} J_{2-4} = \left(\frac{\pi}{0,7 \cdot 6a} \right)^2 \cdot EJ = 0,5595 \frac{EJ}{a^2} = 3P_{cr};$$

$$P_{2-4,cr}^{(г)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{2-4}^{(расч. 10.2, г)} \cdot l_{2-4}} \right)^2 E_{2-4} J_{2-4} = \left(\frac{\pi}{0,5 \cdot 6a} \right)^2 \cdot EJ = 1,096 \frac{EJ}{a^2} = 3P_{cr};$$

Исходя из того, что варианты на рис. 10.5, а и 10.5, б в точке 2 имеют поперечное перемещение, именно эти варианты и следует рассматривать в качестве предельных. Если учесть, что оба эти варианта связаны с предположением о нулевой изгибной жесткости (вариант на рис. 10.5, а «обнуляет» жесткость ригеля 1-2-3 и стойки 4-5, а вариант на рис. 10.5, б – жесткость стойки 4-5 при абсолютно жестком ригеле 1-2-3), то следует признать, что действительное поведение стойки 2-4 должно быть близко к значению по варианту рис. 10.5, а со стороны варианта рис. 10.5, в, поскольку предположение о нулевых жесткостях ригеля и стойки очень сильное. Этот результат зафиксирован в виде следующих соотношений:

$$0,5595 \frac{EJ}{a^2} < 3P_{cr} < 1,096 \frac{EJ}{a^2} \Rightarrow 0,167 \frac{EJ}{a^2} < P_{cr} < 0,365 \frac{EJ}{a^2}. \quad (10.3)$$

Сравнение оценок (10.1), (10.2) и (10.3) показывает, что наименьшее значение нагрузки требуется для потери устойчивости стойки 2-4, так что именно оценка (10.3) является окончательной оценкой для значения критической силы в данной задаче, а стойка 2-4 – наиболее слабым элементом рассматриваемой расчетной схемы с точки зрения ее устойчивости при данных условиях нагружения. Отметим также, что именно стойка 2-4 теряет устойчивость, в то время как сжатые участки ригеля 1-2-3 просто изгибаются под воздействием поворота сечения 2.

В соответствии со сделанным выводом, форма потери устойчивости ЗРС строится на основе поведения стойки 2-4, которая потеряла устойчивость в форме, обеспечиваемой поворотом и смещением узла 2 расчетной схемы.

Построение формы потери устойчивости возможно в двух вариантах (рис. 10.6): при горизонтальном смещении *влево* и при горизонтальном перемещении *вправо*. При построении формы изогнутой оси стойки 2-4 за основу нужно брать форму, которую мы определили как наиболее вероятную (рис. 10.5, в), добавив в ней поворот сечения 2.

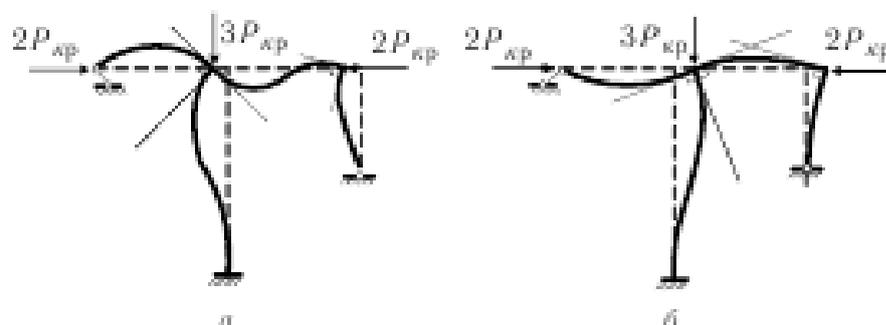


Рис. 10.6

Форма на рис. 10.6, а требует большего запаса потенциальной энергии, поскольку участок ригеля 2-3 имеет большую кривизну (из-за наличия двойного перегиба оси) и искривлена стойка 4-5. А это, в свою очередь означает, что при одних и тех же значениях деформирующих перемещений для получения большей кривизны должны быть приложены большие внешние силы. Так что форма на рис. 10.6, а требует больших значений внешних нагрузок в сравнении с формой на рис. 10.6, б, т.е. соответствующие нагрузки не могут быть признаны критическими. Таким образом, именно форма на рис. 10.6, б является формой потери устойчивости рамы.

Способ эквивалентного стержня дает нам только оценку критической нагрузки. Но эта оценка позволит проконтролировать правильность решения, которое мы получим методом перемещений для сжато-изогнутых стержней.

10. 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ИЗ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Уравнение устойчивости наиболее просто составить, пользуясь методом перемещений, который в этом случае имеет ряд особенностей:

1) нагрузкой на ЗРС являются сосредоточенные силы, приложенные в узлах и вызывающие сжатие участков, поэтому в канонической системе уравнений метода перемещений отсутствуют свободные члены (нет внутрипролетной нагрузки); КСУ в этом случае является однородной системой линейных алгебраических уравнений и имеет ненулевое решение, только если определитель системы уравнений равен нулю;

2) при вычислении коэффициентов КСУ используется таблица стандартных эпюр метода перемещений для сжато-изогнутых стержней, которая включает только эпюры, возникающие в элементарных балках, нагруженных продольной сжимающей силой и единичными перемещениями концевых сечений;

3) поскольку изучается равновесие в смежном состоянии равновесия, сжимающая участок сила создает изгибающий момент, пропорциональный поперечному перемещению точек оси от линии действия этой силы; для учета возникающего изгибающего момента введены специальные функции, на которые ссылается таблица метода перемещений;

4) наличие упомянутых функций превращает коэффициенты при неизвестных метода перемещений в канонической системе уравнений из чисел в функции от неизвестного аргумента – безразмерного параметра нагрузки; этот параметр определяется из условия равенства нулю определителя КСУ.

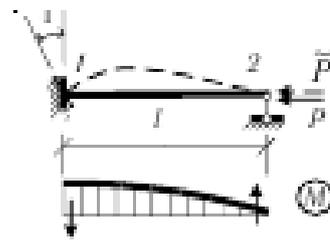
10.3.1 ТАБЛИЦА МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Результаты, зафиксированные в таблице, получены на основе решения дифференциального уравнения сжато-изогнутого стержня при различных вариантах опирания его концов и нагружении единичными угловыми и линейными перемещениями, приложенными на одном из концов балочного элемента.

Форма представления значений ординат изгибающего момента и поперечных усилий выбрана так, что значения, характерные для соответствующих нагрузок в статике (глава 9, рис. 9.8), домножаются на функциональные множители типа $\varphi_k(v_s)$, $\eta_k(v_s)$, зависящие от безразмерного параметра сжимающей силы v_s , связанного с абсолютным значением силы на участке «x» обобщенной формулой Эйлера.

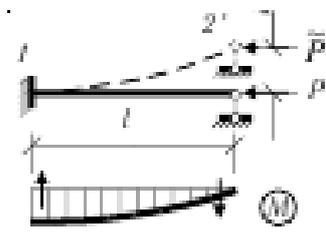
Эти множители определены комбинациями тригонометрических функций, поэтому являются *многозначными* функциями, что вполне соответствует характеру решаемой задачи. Стоит также обратить внимание на то, что сжимающая сила, определяющая аргумент упомянутых функций, *неизвестна*. О ней можно только сказать, что эта сила может поддерживать целый набор смежных состояний, т.е. ее значение также многозначно. Поэтому для нее в формулах множителей введено обозначение \tilde{P} , а не $P_{кр}$. И только после выделения из всего спектра возможных значений \tilde{P} минимального, мы можем утверждать, что $P_{кр} = \min \tilde{P}$.

На рис. 10.7 приведены эюры таблицы метода перемещений для сжато-изогнутых стержней. Эюры построены на растянутых волокнах, положение которых зависит от направления единичного перемещения.



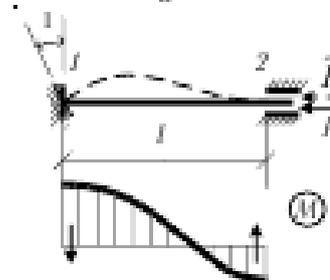
$$M_{1-2} = 3 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}} \varphi_1(v_{1-2});$$

$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = 3 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}^2} \varphi_1(v_{1-2}).$$



$$M_{1-2} = 3 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}^2} \varphi_1(v_{1-2});$$

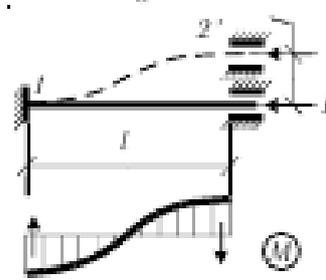
$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = 3 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}^3} \eta_1(v_{1-2}).$$



$$M_{1-2} = 4 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}} \varphi_2(v_{1-2});$$

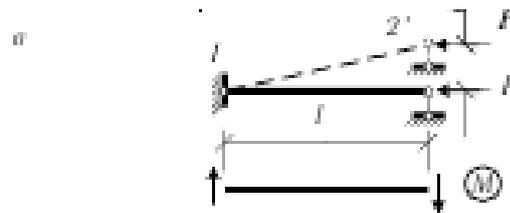
$$M_{2-1} = 2 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}} \varphi_3(v_{1-2});$$

$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = 6 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}^2} \eta_1(v_{1-2}).$$



$$M_{1-2} = M_{2-1} = 6 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}^2} \varphi_4(v_{1-2});$$

$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = 12 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}^3} \eta_2(v_{1-2}).$$



$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}^3} v_{1-2}^2.$$

Рис. 10.7

Приведем формулы для функций-множителей:

$$v = l \sqrt{\frac{\bar{p}}{EJ}}; \quad \varphi_1(v) = \frac{v^2}{3 \left(1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)}; \quad \varphi_2(v) = \frac{1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v}}{4 \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{v}{2}}{\frac{v}{2}} - 1\right)};$$

$$\varphi_3(v) = \frac{\frac{v}{\sin v} - 1}{2 \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{v}{2}}{\frac{v}{2}} - 1\right)}; \quad \varphi_4(v) = \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right);$$

$$\eta_1(v) = \frac{v^2}{3 \left(\frac{\operatorname{tg} v}{v} - 1\right)} = \varphi_1(v) - \frac{v^2}{3}; \quad \eta_2(v) = \eta_1\left(\frac{v}{2}\right) = \varphi_4(v) - \frac{v^2}{12}.$$

Обратите внимание, что значения функций при вычислении усилий по таблице метода перемещений определяются числовыми характеристиками каждого конкретного участка *отдельно*.

Для проведения этих вычислений необходимо для ЗРС подготовить схему дискретизации с нумерацией узлов опирания двухпорных балок и обозначениями безразмерных параметров сжимающей силы для каждого сжатого участка-балки.

Для ЗРС на рис. 10.1 схема дискретизации показана на рис. 10.8.

$$v_{1-2} = J_{1-2} \sqrt{\frac{\bar{p}_{1-2}}{E_{1-2} J_{1-2}}} = 4a \sqrt{\frac{2\bar{p}}{2EJ}} = 4a \sqrt{\frac{\bar{p}}{EJ}};$$

$$v_{2-3} = J_{2-3} \sqrt{\frac{\bar{p}_{2-3}}{E_{2-3} J_{2-3}}} = 4a \sqrt{\frac{2\bar{p}}{2EJ}} = 4a \sqrt{\frac{\bar{p}}{EJ}};$$

$$v_{2-4} = J_{2-4} \sqrt{\frac{\bar{p}_{2-4}}{E_{2-4} J_{2-4}}} = 6a \sqrt{\frac{3\bar{p}}{EJ}} = \left(\frac{6}{4} \sqrt{3}\right) \cdot 4a \sqrt{\frac{\bar{p}}{EJ}}.$$

Рис. 10.8

Для дальнейшей работы следует все введенные параметры выразить в общем масштабе v :

$$v = 4a \sqrt{\frac{\bar{p}}{EJ}} \Rightarrow v_{1-2} = v_{2-3} = v; \quad v_{2-4} \approx 2,598v. \quad (10.4)$$

10.3.2. ПОСТРОЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УСТОЙЧИВОСТИ

Порядок действий по методу перемещений в устойчивости на этапе построения КСУ метода перемещений не отличается от порядка при решении задачи в статике (глава 9, параграфы 9.6-9.8).

Прежде всего, проводится кинематический анализ ЗРС с целью определения количества кинематических неизвестных. Данные, необходимые для проведения анализа, показаны на рис. 10.9.

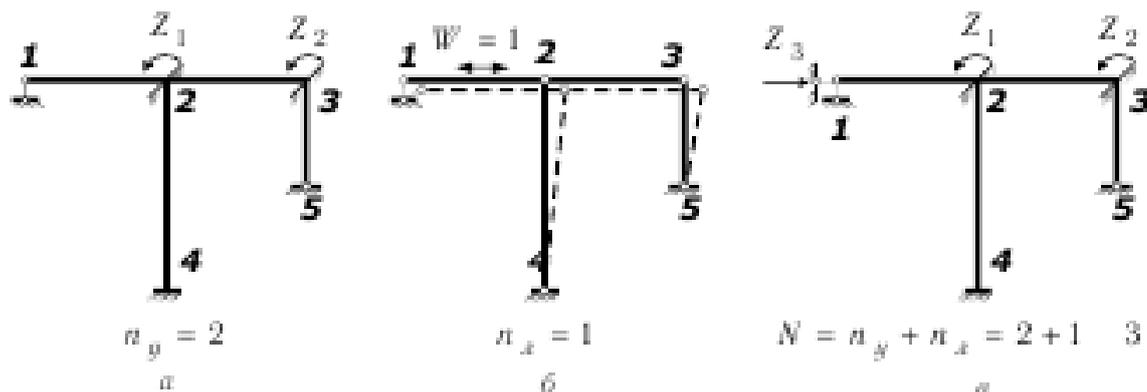


Рис. 10.9

Число угловых неизвестных метода определяется количеством жестких узлов ЗРС (см. рис. 10.9, а), в число которых не входят опорные, даже если они жесткие.

Для определения числа линейных неизвестных требуется преобразовать ЗРС в дополнительную расчетную схемы путем удаления связей, отвечающих за возникновение изгибающих моментов во всех узлах ЗРС, включая опорные (см. рис. 10.9, б). Вычисленное число степеней свободы этой схемы определяет число линейных неизвестных:

$$D = \begin{Bmatrix} 1-2 \\ 2-3 \\ 2-4 \\ 4-5 \end{Bmatrix} = 4; \quad W^{(1)} = \begin{Bmatrix} W_1^{(1)} = 1-1 = 0 \\ W_2^{(1)} = 3-1 = 2 \\ W_3^{(1)} = 2-1 = 1 \\ W_4^{(1)} = 1-1 = 0 \\ W_5^{(1)} = 1-1 = 0 \end{Bmatrix} = 2+1 = 3;$$

$$C_a = \begin{Bmatrix} C_{a,1} = 1 \\ C_{a,4} = 2 \\ C_{a,5} = 2 \end{Bmatrix} = 1+2+2 = 5; \Rightarrow$$

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot (2+1) - (1+2+2) = +1. \quad (10.5)$$

Однако может встретиться случай, когда дополнительная расчетная схема является статически определимой ($W = 0$), но мгновенно изменяемой. В таком случае, приходится определять наличие линейных неизвестных метода путем построения плана бесконечно малых перемещений, проверяя подвижность цепочек узлов, расположенных на каждой вертикали и горизонтали.

Следующий шаг связан с построением эпюр метода перемещений в основной системе метода перемещений, которая получается из ЗРС расстановкой «плавающих» заделок и линейных связей по направлениям обнаруженных неизвестных перемещений. На рис. 10.10 показана эта процедура для ОСМП ЗРС (рис. 10.9, а).

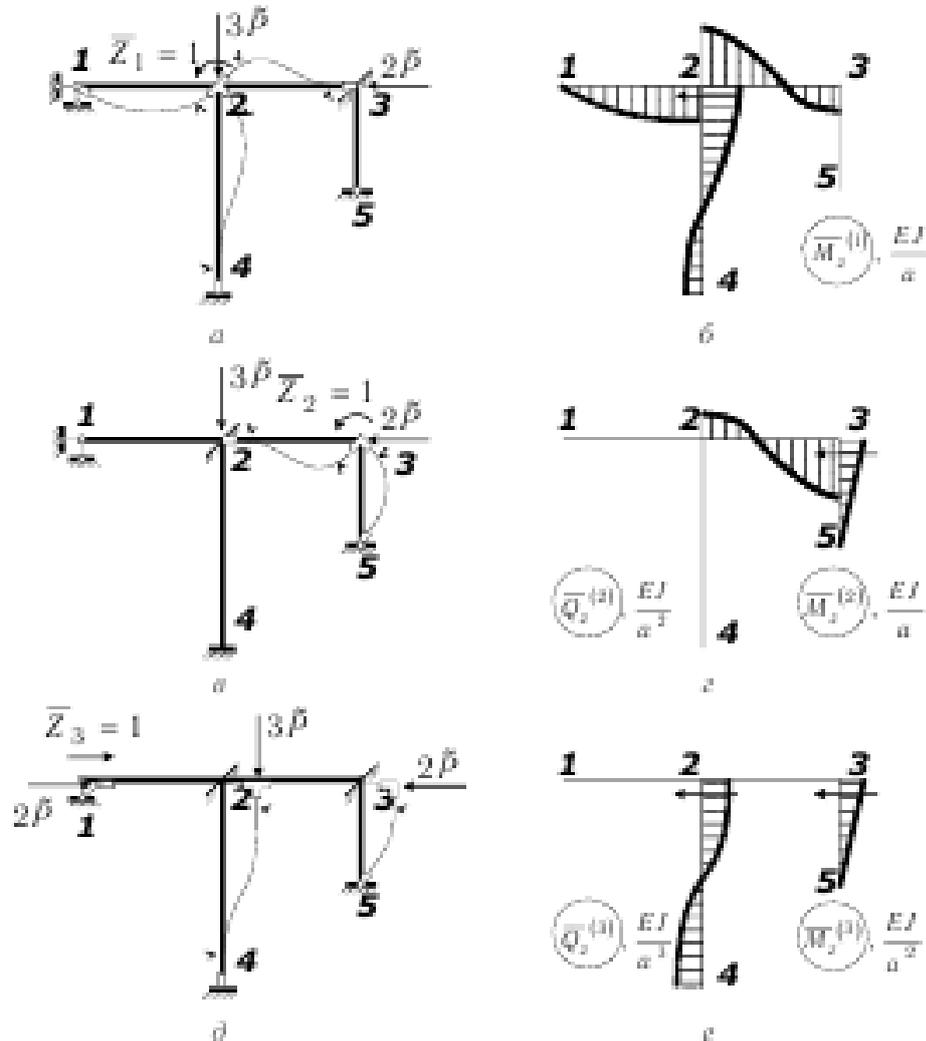


Рис. 10.10

Чтобы не загромождать рисунки эпюр значениями изгибающих моментов и поперечных усилий, выраженными через функции метода

перемещений, будем ссылаться на двухцифровые обозначения усилий, как это было оговорено ранее в задачах статки.

Используя эпюры от нагружения единичными перемещениями в ОСМП (рис. 10.10), выраженные в одном масштабе параметры сжимающей нагрузки на участках ОСМП (10.4), а также табличные эпюры метода перемещений (рис. 10.7), вычислим усилия, необходимые для определения реакций от единичного поворота узла 2 (рис. 10.10, а, б):

$$\begin{aligned}
 M_{2-1} &= M_{1-2}^{(pur.10.7,a)} = 3 \cdot \frac{2EJ}{4a} \cdot \varphi_1(v_{1-2}) = 1,5\varphi_1(v) \frac{EJ}{a}; \\
 M_{2-3} &= M_{1-2}^{(pur.10.7,a)} = 4 \cdot \frac{2EJ}{4a} \cdot \varphi_2(v_{2-3}) = 2\varphi_2(v) \frac{EJ}{a}; \\
 M_{3-2} &= M_{2-1}^{(pur.10.7,a)} = 2 \cdot \frac{2EJ}{4a} \cdot \varphi_3(v_{2-3}) = \varphi_3(v) \frac{EJ}{a}; \\
 M_{2-4} &= M_{1-2}^{(pur.10.7,a)} = 4 \cdot \frac{EJ}{6a} \cdot \varphi_2(v_{2-4}) = 0,6666\varphi_2(2,598v) \frac{EJ}{a}; \\
 Q_{2-4} &= Q_{1-2}^{(pur.10.7,a)} = 6 \cdot \frac{EJ}{(6a)^2} \cdot \varphi_4(v_{2-4}) = 0,1666\varphi_4(2,598v) \frac{EJ}{a^2}.
 \end{aligned} \tag{10.6}$$

Обратите внимание, что момент и поперечная сила в сечении 4 не вычисляются, так как они не входят в узлы с дополнительными связями.

Такие же вычисления для нагрузки в виде единичного поворота в узле 3 по эпюре рис. 10.10, г имеют вид:

$$\begin{aligned}
 M_{2-3} &= M_{2-1}^{(pur.10.7,a)} = 2 \cdot \frac{2EJ}{4a} \cdot \varphi_3(v_{2-3}) = \varphi_3(v) \frac{EJ}{a}; \\
 M_{3-2} &= M_{1-2}^{(pur.10.7,a)} = 4 \cdot \frac{2EJ}{4a} \cdot \varphi_2(v_{2-3}) = 2\varphi_2(v) \frac{EJ}{a}; \\
 M_{3-5} &= M_{1-2}^{(pur.10.7,a)} \Big|_{v_{1-5}=0} = 3 \cdot \frac{EJ}{3a} \cdot 1 = \frac{EJ}{a}; \\
 Q_{3-5} &= Q_{1-2}^{(pur.10.7,a)} \Big|_{v_{1-5}=0} = 3 \cdot \frac{EJ}{(3a)^2} \cdot 1 = 0,3333 \frac{EJ}{a^2}.
 \end{aligned} \tag{10.7}$$

При вычислении усилий в сечении 3 участка 3-5 мы воспользовались тем, что усилия табличных эпюр метода перемещений для сжато-изогнутых стержней при *отсутствии сжимающей силы* на балке совпадают с усилиями табличных эпюр метода перемещений в статике. И по-прежнему вычисляются только те усилия, которые входят в узлы с дополнительными связями.

Проделаем аналогичные выкладки для случая нагружения ОСМП единичным линейным перемещением ригеля 1-2-3, для чего используем соответствующую эпюру (рис. 10.10, е).

$$\begin{aligned}
M_{2-4} &= M_{1-2}^{(puc.7, \delta)} = 6 \cdot \frac{EJ}{(6a)^2} \cdot \varphi_4(v_{2-4}) = 0,1666 \varphi_4(2,598v) \frac{EJ}{a^2}; \\
Q_{2-4} &= Q_{1-2}^{(puc.7, \delta)} = 12 \cdot \frac{EJ}{(6a)^3} \cdot \eta_2(v_{2-4}) = 0,05555 \eta_2(2,598v) \frac{EJ}{a^3}; \\
M_{3-5} &= M_{1-2}^{(puc.7, \delta)} \Big|_{v_{3-5}=0} = 3 \cdot \frac{EJ}{(3a)^2} \cdot 1 = 0,3333 \frac{EJ}{a^2}; \\
Q_{3-5} &= Q_{1-2}^{(puc.7, \delta)} \Big|_{v_{3-5}=0} = 3 \cdot \frac{EJ}{(3a)^3} \cdot 1 = 0,1111 \frac{EJ}{a^3}.
\end{aligned} \tag{10.8}$$

Следующий этап в реализации метода перемещений заключается в определении коэффициентов канонической системы уравнений $r_{ij}(v)$. Для этого используется статический способ, который вполне эффективен для задач с небольшим (не более пяти) количеством неизвестных. Как и в методе перемещений для задач статики, рекомендуется использовать каждую из эюр, построенную от единичных перемещений (рис. 10.10), для определения *всех* реакций в дополнительных связях. Иллюстрацией необходимых действий является рис. 10.11, на котором сплошные стрелки показывают усилия, а двойные стрелки – искомые реакции в дополнительных связях.

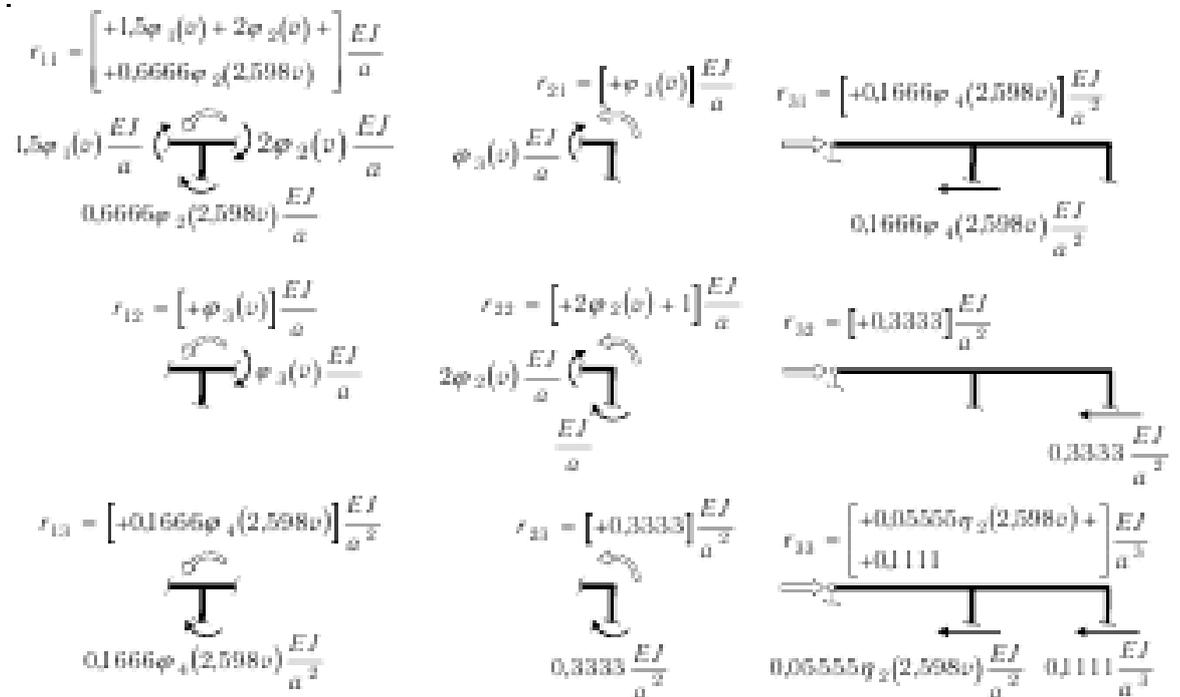


Рис. 10.11

Заметьте, что получение коэффициентов КСУ проводилось без использования теоремы о взаимности реакций, так что теперь ее справедливость можно проверить по данным рис. 10.11. Это является определенной гарантией правильности определения коэффициентов.

С учетом отсутствия свободных членов КСУ метода перемещений для рассматриваемой задачи устойчивости принимает вид:

$$\begin{bmatrix} \left[+1,5\varphi_1(v) + 2\varphi_2(v) + \right. \\ \left. +0,6666\varphi_2(2,598v) \right] \frac{EJ}{a} & \left[+\varphi_3(v) \right] \frac{EJ}{a} & \left[+0,1666\varphi_4(2,598v) \right] \frac{EJ}{a^2} \\ \left[+\varphi_3(v) \right] \frac{EJ}{a} & \left[+2\varphi_2(v) + 1 \right] \frac{EJ}{a} & \left[+0,3333 \right] \frac{EJ}{a^2} \\ \left[+0,1666\varphi_4(2,598v) \right] \frac{EJ}{a^2} & \left[+0,3333 \right] \frac{EJ}{a^2} & \left[+0,05555\eta_2(2,598v) + \right. \\ & & \left. +0,1111 \right] \frac{EJ}{a^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

10.3.3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Условием существования хотя бы одного перемещения, не равного нулю (иначе не реализуется смежное деформированное состояние!) является требование равенства нулю определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных КСУ. При составлении выражения этого определителя нужно учитывать, что его значение не изменится, если все элементы строки или столбца поделить на число отличное от нуля. В первой и второй строках таким числом является EJ/a , во второй строке — число EJ/a^2 . Кроме того, после деления на эти числа строк, в третьем столбце остается общий множитель EJ/a . Поделив и на него, получаем исходный вид определителя устойчивости:

$$\begin{vmatrix} 1,5\varphi_1(v) + 2\varphi_2(v) + & \varphi_3(v) & 0,1666\varphi_4(2,598v) \\ +0,6666\varphi_2(2,598v) & & \\ \varphi_3(v)(v) & 2\varphi_2(v) + 1 & 0,3333 \\ 0,1666\varphi_4(2,598v) & 0,3333 & 0,05555\eta_2(2,598v) + \\ & & +0,1111 \end{vmatrix} = 0 = f(v). \quad (10.9)$$

Если раскрыть этот определитель, вычислив его, например, по правилу Саррюса, то мы получим нелинейное трансцендентное уравнение относительно v . Способы определения его корней изучаются в дисциплине «Численные методы». И наиболее простой из них состоит в реализации двух этапов: 1) отделение корня (определение интервала, содержащего корень) способом простого перебора; 2) уточнение корня (уменьшение размеров интервала до величины, когда любая из его границ, принятая за значение искомого корня, дает его значение с заданной наперед точностью) методом половинного деления.

Применение этого подхода требует наличия механизма вычисления значения определителя при заданном значении аргумента v . Самым простым является механизм, основанный на использовании таблиц функций метода перемещений для сжато-изогнутых стержней. Такие таблицы оставлены для отрезка $[0, 2\pi]$, поскольку указанные функции определяются тригонометрическими составляющими. В табл. 10.1 приведены значения функций, подсчитанные для шага 0,1 аргумента v .

Таблица 10.1

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000
0,1	0,9994	0,9997	1,0002	0,9999	0,9961	0,9990
0,2	0,9973	0,9987	1,0007	0,9994	0,9640	0,9960
0,3	0,9940	0,9970	1,0015	0,9985	0,9640	0,9910
0,4	0,9893	0,9947	1,0027	0,9973	0,9360	0,9840
0,5	0,9832	0,9916	1,0042	0,9958	0,8999	0,9750
0,6	0,9757	0,9879	1,0061	0,9940	0,8557	0,9640
0,7	0,9669	0,9836	1,0083	0,9918	0,8035	0,9510
0,8	0,9565	0,9785	1,0109	0,9893	0,7432	0,9360
0,9	0,9447	0,9727	1,0138	0,9864	0,6747	0,9189
1,0	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,1	0,9164	0,9590	1,0209	0,9797	0,5131	0,8788
1,2	0,8998	0,9511	1,0251	0,9757	0,4198	0,8557
1,3	0,8814	0,9424	1,0297	0,9715	0,3181	0,8307
1,4	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035
1,5	0,8393	0,9227	1,0403	0,9619	0,0893	0,7744
$\pi/2$	0,8225	0,9149	1,0445	0,9620	0,0000	0,7525
1,6	0,8152	0,9116	1,0463	0,9565	-0,0381	0,7432
1,7	0,7891	0,8998	1,0529	0,9508	-0,1743	0,7100
1,8	0,7606	0,8871	1,0600	0,9447	-0,3194	0,6747
1,9	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	-0,4736	0,6374
2,0	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,1	0,6597	0,8436	1,0849	0,9241	-0,8103	0,5566
2,2	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,3	0,5772	0,8099	1,1051	0,9083	-1,1861	0,4675
2,4	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3896	0,4198
2,5	0,4793	0,7720	1,1286	0,8908	-1,6040	0,3700
2,6	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,7	0,3621	0,7295	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2,8	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,9	0,2195	0,6819	1,1878	0,8505	-2,5838	0,1497

Продолжение табл. 10.

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3,0	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,1	0,0424	0,6287	1,2251	0,8275	-3,1609	0,0267
π	0,0000	0,6168	1,2336	0,8225	-3,2898	0,0000
3,2	-0,0635	0,5997	1,2462	0,8152	-3,4769	-0,0381
3,3	-0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,4	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-1,1718	-0,1743
3,5	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3,6	-0,6862	0,4655	1,3509	0,7606	-5,0062	-0,3194
3,7	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7455	-5,4904	-0,3954
3,8	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,9	-1,6269	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6969	-0,5542
4,0	-2,1726	0,2933	1,5019	0,6961	-7,5060	-0,6372
4,1	-2,9802	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5836	-0,7525
4,2	-4,3156	0,1878	1,6037	0,6597	-10,196	-0,8103
4,3	-6,9947	0,1287	1,6636	0,6404	-13,158	-0,9005
4,4	-15,327	0,0648	1,7310	0,6202	-21,780	-0,9931
4,5	227,93	-0,0048	1,8070	0,5991	221,18	-1,0884
4,6	14,669	-0,0890	1,8933	0,5772	7,616	-1,1861
4,7	7,8186	-0,1646	1,9920	0,5543	0,4553	-1,2865
$3\pi/2$	7,4022	-0,1755	2,0052	0,5514	-0,0000	-1,2992
4,8	5,4023	-0,2572	2,1056	0,5304	-2,2777	-1,3896
4,9	4,1463	-0,3607	2,2375	0,5054	-3,8570	-1,4954
5,0	3,3615	-0,4772	2,3923	0,4793	-4,9719	-1,6040
5,1	2,8130	-0,6099	2,5757	0,4520	-5,8570	-1,7155
5,2	2,3986	-0,7629	2,7960	0,4234	-6,6147	-1,8299
5,3	2,0668	-0,9422	3,0648	0,3935	-7,2965	-1,9474
5,4	1,7884	-1,1563	3,3989	0,3621	-7,9316	-2,0679
5,5	1,5455	-1,4182	3,8236	0,3291	-8,5379	-2,1917
5,6	1,3266	-1,7481	4,3794	0,2944	-9,1268	-2,3189
5,7	1,1235	-2,1803	5,1346	0,2580	-9,7065	-2,4495
5,8	0,9302	-2,7777	6,2130	0,2195	-10,283	-2,5838
5,9	0,7421	-3,6679	7,8727	0,1790	-10,861	-2,7219
6,0	0,5551	-5,1594	10,727	0,1361	-11,445	-2,8639
6,1	0,3656	-8,2336	16,739	0,0907	-12,038	-3,0102
6,2	0,1700	-18,591	37,308	0,0424	-12,643	-3,1609
2π	-0,0000	$-\infty$	$+\infty$	0,0000	-13,159	-3,2898

Воспользуемся данными этой таблицы для отделения корня уравнения устойчивости (10.9) в интервале длиной 0,4. Процедура отделения требует наличия табулированной с указанным выше интервалом функ-

ции определителя устойчивости $f(v)$, значения которой в точках $v_i = i \cdot 0,4$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) вычисляются одним из известных способов (например, способом разложения определителя устойчивости по элементам строки).

$$f(0,4) = \det \begin{pmatrix} 4,115 & 1,002 & 0,1635 \\ 1,002 & 2,989 & 0,3333 \\ 0,1636 & 0,3333 & 0,1606 \end{pmatrix} = 1,386;$$

$$f(0,8) = \det \begin{pmatrix} 3,956 & 1,010 & 0,1542 \\ 1,010 & 2,957 & 0,3333 \\ 0,1543 & 0,3333 & 0,14252 \end{pmatrix} = 1,115;$$

...

Табулированная функция определителя представлена в табл. 10.2.

Таблица 10.2

v	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2
f	1,386	1,115	0,7056	0,2277	-0,1651	5,585	-1,282	-0,2787
v	3,6	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	
f	-2,728	1,707	15,76	8,363	7,072	12,57	1326	

Нетрудно убедиться в том, что на интервалах (1,6; 2,0), (2,4; 2,8) и (3,6; 4,0) функция меняет знак, что говорит о наличии хотя бы одного корня в каждом из этих интервалов. Поскольку нас интересует минимальное значения корня, постольку *уточнение* значения этого корня (табл. 10.3) будем проводить способом половинного деления на интервале (1,6; 2,0).

Таблица 10.3

v	1,8	1,9	1,85	1,825
f	0,003040	-0,09231	-0,04674	-0,02231
v	1,8125	1,80625	1,803125	1,8015625
f	-0,009741	-0,003379	-0,0007617	0,001426

После выбора середины начального интервала ($v = 1,8$) процесс уменьшения интервала содержания корня (интервала с разнознаковыми значениями функции f на концах) происходит за счет движения *левой* границы – она приближается к правой. И только в точке $v = 1,8015625$ нужно на следующем шаге двигать правую границу, выбирая очередной интервал, содержащий корень. Понятно, что процесс не имеет конца, если не выставить требования к точности решения. Ограничимся погрешностью решения, равной полуразности последнего интервала, т.е.

$|1,803125-1,8015625| = 0,0015625$. А за значение корня примем значение середины интервала $v_{кр} = 1,802$ с абсолютной погрешностью 0,002.

Вычислим значение масштаба критической нагрузки:

$$v_{кр} \approx 1,802 \Rightarrow P_{кр} \approx \left(\frac{1,802}{4a}\right)^2 EJ = 0,203 \frac{EJ}{a^2}. \quad (10.10)$$

Сравнение этого результата с оценкой (10.3) показывает, что найденное значение принадлежит интервалу (0,167; 0,365), который назначен этой оценкой, и соответствует значению коэффициента приведенной длины, равному

$$\mu_{2-4} = \frac{\pi}{v_{2-4,кр}} = \frac{\pi}{2,598 \cdot v_{кр}} = \frac{\pi}{2,598 \cdot 1,802} = 0,671.$$

Этот результат говорит о том, что перемещения сечения 2 (поворот и линейное горизонтальное) не являются свободными, о чем и шла речь при обсуждении оценки (10.3).

Заметим также, что полученное значение критической силы является приближенным, хотя значительно более точным, чем оценка (10.3). Стоит обратить внимание, что применение данных табл. 10.1 (при ручном счете) не исключает возможности потери минимального значения корня, если выбрать интервал отделения слишком большим.

Гарантировать получение минимального корня уравнения устойчивости, равно как и минимальную погрешность определения значения критической нагрузки, можно только на основе применения для расчета ЭВМ, оснащенной соответствующим программным обеспечением.

10.4. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

Для построения формы потери устойчивости, соответствующей критическому значению нагрузки используется КСУ метода перемещений, коэффициенты которой вычислены при значении аргумента $v = v_{кр}$.

$$\begin{bmatrix} \left[+1,5\varphi_1(1,802) + 2\varphi_2(1,802) + \right] \frac{EJ}{a} & \left[+\varphi_2(1,802) \right] \frac{EJ}{a} & \left[+0,1666\varphi_4(2,598 \cdot 1,802) \right] \frac{EJ}{a^2} \\ \left[+0,6666\varphi_2(2,598 \cdot 1,802) \right] \frac{EJ}{a^2} & \left[+2\varphi_2(1,802) + 1 \right] \frac{EJ}{a} & \left[+0,3333 \right] \frac{EJ}{a^2} \\ \left[+\varphi_2(1,802) \right] \frac{EJ}{a} & \left[+0,3333 \right] \frac{EJ}{a^2} & \left[+0,05555\varphi_2(2,598 \cdot 1,802) + \right] \frac{EJ}{a^2} \\ \left[+0,1666\varphi_4(2,598 \cdot 1,802) \right] \frac{EJ}{a^2} & \left[+0,1111 \right] \frac{EJ}{a^2} & \left[+0,1111 \right] \frac{EJ}{a^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 2,814 \frac{EJ}{a} & 1,060 \frac{EJ}{a} & 0,09310 \frac{EJ}{a^2} \\ 1,060 \frac{EJ}{a} & 2,773 \frac{EJ}{a} & 0,3333 \frac{EJ}{a^2} \\ 0,09434 \frac{EJ}{a^2} & 0,3333 \frac{EJ}{a^2} & 0,04073 \frac{EJ}{a^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Поскольку определитель этой системы уравнений равен нулю при значениях коэффициентов, вычисленных от v_{cr} , то система имеет неоднозначное решение. Это означает, что нельзя определить абсолютные значения перемещений. Поэтому, преобразовав предварительно систему к безразмерным параметрам, задаемся единичным значением одного из них (например, последнего по номеру). Это позволяет вместо исходной системы уравнений решать систему с размерностью на единицу меньшей (из системы удаляется уравнение с тем же номером, что и перемещение с назначенным значением). Оставшаяся часть системы становится неоднородной и решается любым из способов решения систем линейных алгебраических уравнений (Гаусса, Крамера и др.).

$$\begin{cases} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \\ \tilde{Z}_3 \end{cases} = \begin{cases} Z_1 / (EI / a) \\ Z_2 / (EI / a) \\ Z_3 / (EI / a^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2,814 & 1,060 & 0,09310 \\ 1,060 & 2,773 & 0,3333 \\ 0,09434 & 0,3333 & 0,04073 \end{bmatrix} \begin{cases} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \\ \tilde{Z}_3 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases};$$

$$\tilde{Z}_3 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2,814 & 1,060 \\ 1,060 & 2,773 \end{bmatrix} \begin{cases} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \end{cases} = \begin{cases} -0,09310 \\ -0,3333 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \end{cases} = \begin{cases} 0,0142 \\ -0,126 \end{cases}. \quad (10.11)$$

Построение формы потери устойчивости проводится по найденным перемещениям с учетом, того, что знак «-» в значении относительного перемещения означает, что оно противоположно направлению, указываемому соответствующим единичным перемещением (при построении эпюр). На рис. 10.12 показана полученная форма потери устойчивости.

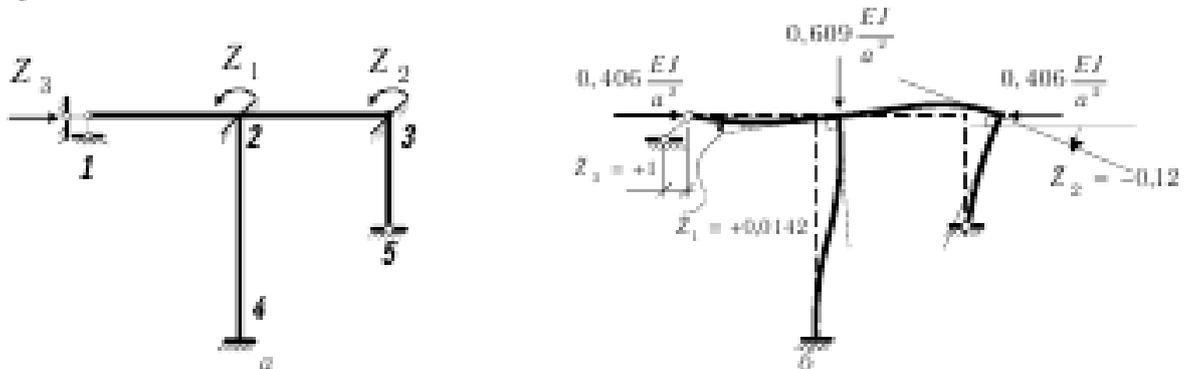


Рис. 10.12

Таким образом решение задачи устойчивости завершено, поскольку найдено значение критической нагрузки и построена форма потери устойчивости, этой нагрузке соответствующая (см. рис. 10.12).

На рис. 10.13 приведен операционный алгоритм решения задачи устойчивости, реализованный в приведенном примере.

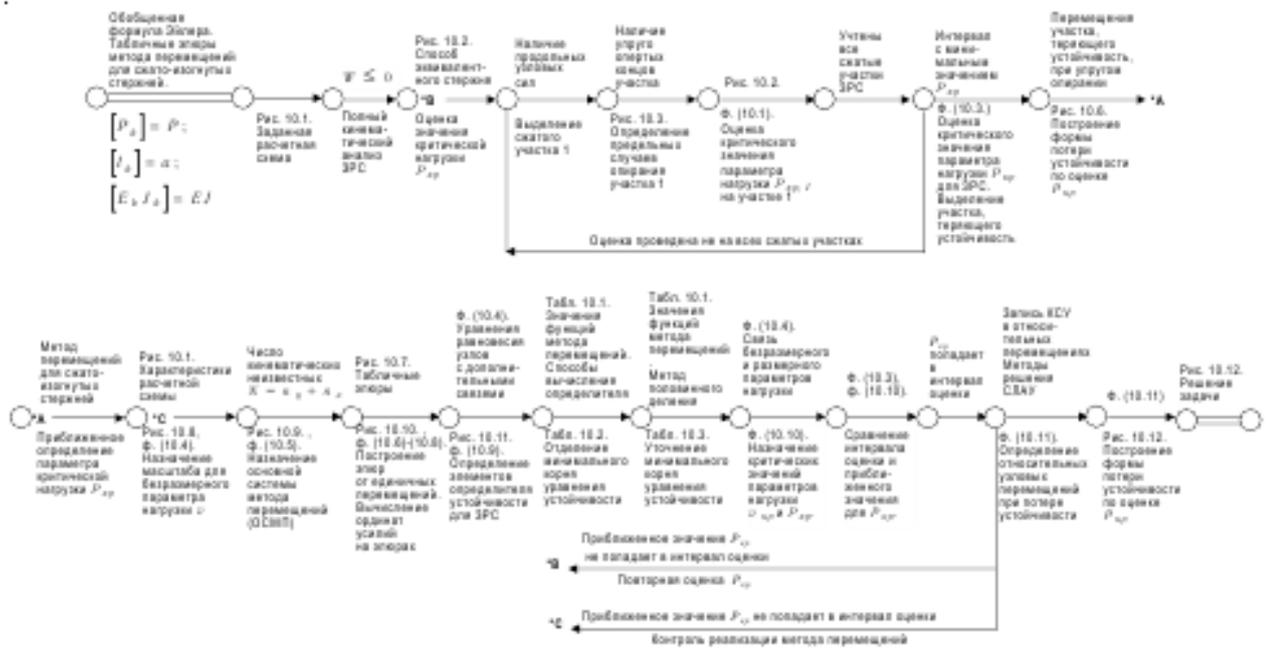


Рис. 10.13

4. Библиографический список

1. Теличко, Г.Н. Тульский государственный университет. Основы строительной механики плоских стержневых систем : Учебник для высш. и сред. учеб. заведений / Г.Н. Теличко; ТулГУ. – 2-е изд., испр. и доп. – Тула, 2010.– 440с.